

## Ukázka zápočtového testu z Matematické analýzy I

( 90 minut )

1. Vypočítejte limitu (  $n \in \mathbb{N}$  ,  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$  )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \cos \frac{a}{n} \right)^{n^2} .$$

nebo

1. Necht' je  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  . Co můžete říci o limitě posloupnosti  $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$  ?

Příslušná tvrzení dokažte.

nebo

1. Napište definici nevlastní limity posloupnosti (  $+\infty$  ) .

Necht'  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$  a necht' existuje  $n_0 \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n \in \mathbb{N}, n > n_0$  je  $a_n > b_n$  .

Co můžete říci o limitě  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  ? Odůvodněte.

(15 bodů)

2. Funkce  $f$  je definována:

$$f(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \text{ pro } |x| < 1, \quad f(x) = 0 \text{ pro } |x| \geq 1 .$$

Ukažte, že funkce  $f$  i její derivace  $f'$  jsou funkce spojité v  $\mathbb{R}$  .

nebo

2. Ukažte, že  $f$  je spojitá v  $\mathbb{R}$  a dále zjistěte, pro která  $x \in \mathbb{R}$  existuje derivace, případně jednostranné derivace  $f'_+(x)$  nebo  $f'_-(x)$  (a tyto derivace spočítejte), když:

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{ pro } x \neq 0, \quad f(0) = \frac{1}{2} .$$

(15 bodů)

3. Najděte lokální a globální extrémů funkce

$$f(x) = \frac{|2x-1|}{(x-1)^2} .$$

nebo:

Vyšetřete průběh zadané funkce:

najděte její definiční obor, vyšetřete spojitost funkce  $f$  a limity v krajních bodech; vypočítejte první derivaci, vyšetřete monotonii, lokální a globální extrémů funkce  $f$ ; vypočítejte druhou derivaci, najděte intervaly, na kterých je funkce konvexní, resp. konkávní; načrtněte graf funkce.

(30 bodů)

4. Určete největší otevřený interval, kde existuje integrál

$$\int \frac{\ln x}{x(1+\ln^4 x)} dx \quad \text{nebo} \quad \int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx \quad \text{nebo} \quad \int \frac{x+5}{(x+3) \cdot (x^2 + 4x + 5)} dx$$

a integrál vypočítejte.

nebo

4. Vypočítejte obsah omezené rovinné oblasti, která je ohraničená grafem funkce  $y = \arcsin x$ , tečnou k tomuto grafu v bodě  $[0,0]$  a přímkou  $x = 1$ .

nebo

4. Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací kolem osy  $x$  omezené rovinné oblasti  $\omega$ , která je ohraničená grafy funkcí  $y = xe^x$  a  $y = x$  a přímkou  $x = 1$ .

(20 bodů)